2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ASK4MATH

WWW.ASKISIOLOGIO.GR

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2017

Εξεταζόμενο μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία : 19-Ιουνίου-2017

Επιμέλεια: Ask4math

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

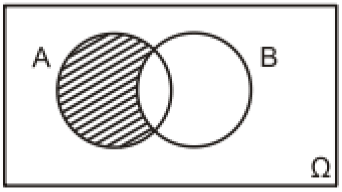
α. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, ισχύει ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ε. Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο Β – Α



Μονάδες 10

ΛΥΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό σελ. 31

Α2. Σχολικό σελ.14

Α3. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζουμε τη διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο μιας κλάσης

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X.

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

B1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

α. η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)

β. η διάμεσος δ (μονάδες 5)

γ. η διακύμανση s^2 (μονάδες 7)

Μονάδες 18

B2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΛΥΣΕΙΣ

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^2 \cdot v_i$
1	2	2	9	18
3	3	9	1	3
5	4	20	1	4
9	1	9	25	25
Σύνολο	10	40		50

Β1.

α) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \dfrac{40}{10} = 4$

β) Οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, \ldots, t_{10}$ σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9

οπότε $\delta = \dfrac{t_5 + t_6}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$

γ) $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})^2 \cdot v_i}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$

Β2. $s^2 = 5 \Rightarrow s = \sqrt{5}$

Άρα $\quad CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4} > \dfrac{\sqrt{4}}{4} > \dfrac{1}{10}$

Άρα $\quad CV > 10\%$

οπότε το δείγμα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΣ.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1, \quad x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος Γ2. τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΕΙΣ

Γ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική με $f'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

$$OE = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ που είναι ίσο με $\frac{3}{4}$.

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(2) = 3$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 3x + \beta$ και οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν της εξίσωση της εφαπτομένης.

Όμως $f(2) = 3$ άρα $A(2,3)$

Τελικά $y = 3x + \beta \Leftrightarrow 3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Η εφαπτομένη είναι λοιπόν $\varepsilon : y = 3x - 3$

Γ3. Η ευθεία ε τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τεταγμένη ίση με το μηδέν δηλ. $B(x_1, 0)$ άρα με αντικατάσταση έχουμε :

$$y = 3x - 3 \Leftrightarrow 0 = 3x_1 - 3 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Τελικά $B(1,0)$.

Η ευθεία ε τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τετμημένη ίση με το μηδέν δηλ. $\Gamma(0, y_1)$ άρα με αντικατάσταση έχουμε : $y = 3x - 3 \Leftrightarrow y_1 = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y_1 = -3$

Τελικά $\Gamma(0, -3)$.

Γ4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-1^2}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.

Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

Β: «να εξαχθούν δύο μπάλες διαφορετικού χρώματος»

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος Δ2.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

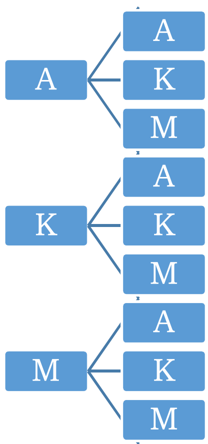
$A', A \cap B, A - B, B - A.$ (μονάδες 8)

β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το ποιο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο Α όσο και με το ενδεχόμενο Β, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$ (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΛΥΣΕΙΣ

Δ1.



$$\Omega = \{AA, AK, AM, KA, KK, KM, MA, MK, MM\}$$

Δ2. $A = \{AM, KM, MM\}$

$B = \{AK, AM, KA, KM, MA, MK\}$

Δ3.

α) Έχουμε

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$$

$A \cap B = \{AM, KM\}$, οπότε $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{9}$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

β) Έχουμε $A \cap \Gamma = \varnothing, B \cap \Gamma = \varnothing$

$A \cup B = \{AM, AK, KA, KM, MA, MK, MM\}$

$(A \cup B)' = \{AA, KK\}$

Είναι $\Gamma \subseteq (A \cup B)'$ άρα $P(\Gamma) \leq P\left[(A \cup B)'\right] \Leftrightarrow P(\Gamma) \leq \dfrac{2}{9}$

Επομένως, η μέγιστη τιμή είναι $\dfrac{2}{9}$.

Καλά αποτελέσματα