

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A2. Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ μία πολυωνυμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες**, σημειώνοντας στο χαρτί σας δίπλα από κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό ή Λάθος, αντίστοιχα:

(α') Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε είναι και αντιστρέψιμη.

(β') Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με ℓ αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

(γ') Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 5,$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

(δ') Αν $f(x) = e$ και $g(x) = \ln x$ τότε:

$$(f \circ g)(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ε') Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$ υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{αν και δεν έχει νόημα το όριο } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Μονάδες 10

A4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε:

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0, \text{ τότε } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 4

B4. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Μονάδες 6

B5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το:

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e)).$$

Μονάδες 5

Γ4. Να λύσετε την ανισότητα:

$$f(e^{x^2-4x+5}) - \ln e > \ln(1 + e).$$

Μονάδες 6

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x^2}{\sin x}\right).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = x^{2017} + x^{2019}$$

και η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y - 1) > x + y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) > x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(g \circ f)(x^2 + 1) > g(x^2 + 2).$$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(g(-x))}.$$

Μονάδες 6