|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Βασίλης\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\NEW ASKISIOLOGIO.GR.PNG | **ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ****ΤΑΞΗ:** Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΚΑΦΑΛΑΙΟ:** ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**ΕΝΟΤΗΤΑ**: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:** ΜΠΟΖΑΤΖΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ |

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας  συνάρτησης  με τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία .

**Μονάδες 9**

**Α2.** Πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες;

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να σημειώσετε Σ για τις Σωστές και Λ για τις Λάθος προτάσεις:

**α.** Κάθε συνάρτηση έχει τουλάχιστον ένα είδος ακροτάτου.

**Μονάδες 2**

**β.** Κάθε  συνάρτηση τέμνει τον άξονα  το πολύ μία φορά.

**Μονάδες 2**

**γ.** Η αντίστροφη  μιας συνάρτησης f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f.

**Μονάδες 2**

**Α4.** α. Είναι σωστός ή όχι ο ισχυρισμός ότι κάθε  συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη;

**Μονάδες 1**

β. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  με  .

Αν η  είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  και  τότε:

**B1.** Να μελετήσετε τις  και  ως προς τη μονοτονία .

**Μονάδες 10**

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να λύσετε την ανίσωση .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση:  με σύνολο τιμών το  .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε τις εξισώσεις:  και .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των  και .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να λύσετε την εξίσωση .

**Μονάδες 5**

**Γ5.** Να λύσετε την ανίσωση .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται τρεις συναρτήσεις με τύπους :

, , 

**Δ1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού αυτών.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα, να δικαιολογήσετε γιατί έχει αντίστροφη και να ορίσετε την .

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο  και ολικό μέγιστο .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να βρείτε τη σύνθεση της f με την g.

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ η εξίσωση :

, λύνεται ως προς x, στο .

**Μονάδες 5**

**ΟΠΟΙΟΣ ΕΠΙΜΕΝΕΙ…ΝΙΚΑ**

**Λύσεις**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία

**Α2.** Θεωρία

**Α3.** Λ-Σ-Σ

**Α4.** α. Ο ισχυρισμός είναι λάθος.

β. Η συνάρτηση  είναι  αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Για κάθε  έχουμε, με  έχουμε:



Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επιπλέον για την συνάρτηση g έχουμε:

Δίνεται ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη.

Ας υποθέσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε έχουμε:

 ΑΤΟΠΟ

Οπότε η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

**Β2.** Παρατηρούμε ότι .

Άρα η εξίσωση  γίνεται .

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα θα είναι και 1-1 και επιπλέον παρατηρούμε ότι .

Άρα έχουμε:



**B3.** Παρατηρούμε ότι .

Άρα η ανίσωση παίρνει τη μορφή  και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει:



Όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα, άρα τελικά έχουμε .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Για κάθε  έχουμε, με  έχουμε:



οπότε με πρόσθεση κατά μέλη εύκολα καταλήγουμε ότι . Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε θα είναι και 1-1 και θα υπάρχει η αντίστροφή της.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν κάποια  για τα οποία ισχύει:



Τότε όμως προκύπτει:

 ΑΤΟΠΟ

Άρα η συνάρτηση  έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

**Γ2.** Παρατηρούμε ότι , οπότε έχουμε:



αφού η f είναι 1-1.

Αντίστοιχα για την εξίσωση  έχουμε:



**Γ3. α’ τρόπος**

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των  και , λόγο συμμετρίας, θα βρίσκονται όλα πάνω στην ευθεία  και αντίστροφα, κάθε κοινό σημείο της μιας με την  θα είναι σημείο και της άλλης. Οπότε αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία των  και , ή κατ’ επέκταση να λύσουμε την εξίσωση .

Οπότε έχουμε:



Οπότε το μοναδικό κοινό σημείο των  και  είναι το .

**β’ τρόπος**

Για κάθε  λύνουμε το σύστημα 

Αφαιρούμε κατά μέλη

Εύκολα αποδεικνύω ότι η  είναι γνήσια αύξουσα συνεπώς 1-1 και άρα 

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το



Άρα οι  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το .

**Γ4.** Αρχικά παρατηρούμε ότι .

Οπότε η εξίσωση γίνεται:





Όμως είναι , οπότε έχουμε:



**Γ5.** Έχουμε:

 



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για την συνάρτηση h θα πρέπει , άρα  .

Για την συνάρτηση f είναι , αφού .

Για την συνάρτηση g θα πρέπει , από όπου προκύπτει .

**Δ2.** Για κάθε  έχουμε, με  έχουμε:



άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1. Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της.

Για κάθε  και  έχουμε:

.

Άρα τελικά έχουμε .

**Δ3.** Ισχύει ότι  , για κάθε , αφού είναι:



και επιπλέον είναι .

Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο το .

Όμως η f είναι περιττή αφού .

Άρα η f θα παρουσιάζει ελάχιστο το , αφού τότε θα έχουμε:

 , που ισχύει.

**Δ4.** Αρχικά θα ελέγξουμε αν ορίζεται η .

Θα πρέπει:



Επομένως αφού ορίζεται η ζητούμενη σύνθεση θα προχωρήσουμε στην εύρεση του τύπου της συνάρτησης αυτής.



**Δ5. α’ τρόπος**

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:







Οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη (όλοι οι όροι είναι θετικοί) προκύπτει:



Άρα είναι .

Επομένως η εξίσωση έχει λύση για κάθε .

**β’ τρόπος (Σε σύνδεση με το Δ3)**

 για κάθε 

Για  , 

Για  , …………………………… 

Για  , …………………………… 

Επιμέλεια λύσεων: Μποζατζίδης Βασίλης – Παπαδημητρίου Γιάννης

**ΟΠΟΙΟΣ ΕΠΙΜΕΝΕΙ…ΝΙΚΑ**

askisiologio@gmail.com

www.askisiologio.gr

